ثنـائي القطب RC

في هذا الدرس يجب أن :

1 - أعرف أن شحنة مكثفة تتعلق بالتوتر الذي شُحنت تحته . Q = C U

2 - أعرف أن المكثفة مخزن للشحن الكهربائية ، وبالتالي للطاقة الكهربائية ، وهذه الطاقة يمكن استعمالها غير مباشرة في دارة كهربائية أخرى .

3 - أعرف أن مكثفتين مربوطتين على التسلسل تكون لهما نفس الشحنة الكهربائية Q ، وأن مكثفتين مربوطتين على التفرع يكون مجموع شحنتيهما مساويا لشحنة المكثفة المكافئة لهما .

4 - أعرف قانوني السعات في ربط المكثفات ، وأنه إذا أردنا الحصول على سعة كبيرة يجب ربط المكثفات على التفرع وإذا أردنا الحصول على سعة صغيرة نربط المكثفات على التسلسل .

5 - أعرف أنه عندما نشحن مكثفة تحت توتر ثابت ، فإن شدة التيار تمر مباشرة إلى قيمة عظمى ، ثم تتناقص حسب علاقة أسيّة .

6 - أعرف أنه عندما نشحن مكثفة تحت توتر ثابت فإن التوتر بين طرفيها يتزايد حسب علاقة أسية ، وأن التوتر بين طرفي الناقل الأومي يتناقص حسب دالة أسية إلى أن ينعدم .

7 - أعرف أنه عند تفريغ مكثفة في ناقل أومي فإن شدة التيار تمر مباشرة إلى قيمة عظمى سالبة (الجهة الاصطلاحية للتيار) ، ثم تتناقص قيمتها المطلقة حسب علاقة أسيّة . أما التوتر فيتناقص حسب علاقة أسية إلى أن ينعدم .

8 – أعرف كتابة المعادلات التفاضلية التي تخضع لها المقادير الثلاثة u_C ، q ، u_R أثناء الشحن وأثناء التفريغ .

9 – أعرف كيفية حلول هذه المعادلات ورسم البيانات الخاصة بها بدلالة الزمن .

10 – أعرف أن ثابت الزمن هو $\tau = RC$ ، وأنه متجانس مع الزمن .

11 – أعرف كل الطرق لاستخراج ثابت الزمن من البيانات الأربعة .

12 – أعرف أن الطاقة المخزّنة في مكثفة بعد شحنها هي $E_C = \frac{1}{2} C E^2$.

ملخص الدرس

سعة مكثفة

- مقدار مميّز للمكثفة لا يتغير مهما كانت الدارة التي نربط فيها المكثفة $C = \frac{Q}{U}$ ، حيث : C (F) ، Q (C) ، U (V)

- السعة المكافئة C لمكثفتين موصولتين على التسلسل سعتاهما C_1 و C_2 هي C ، حيث :

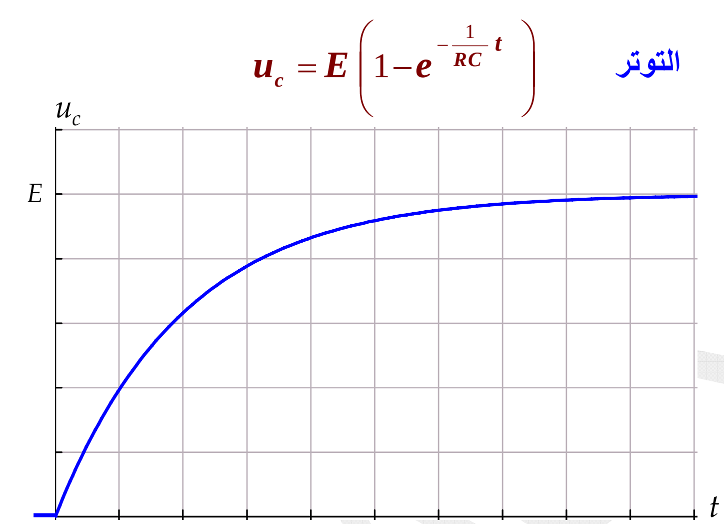
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- السعة المكافئة C لمكثفتين موصولتين على التفرّع سعتاهما C_1 و C_2 هي ، حيث :

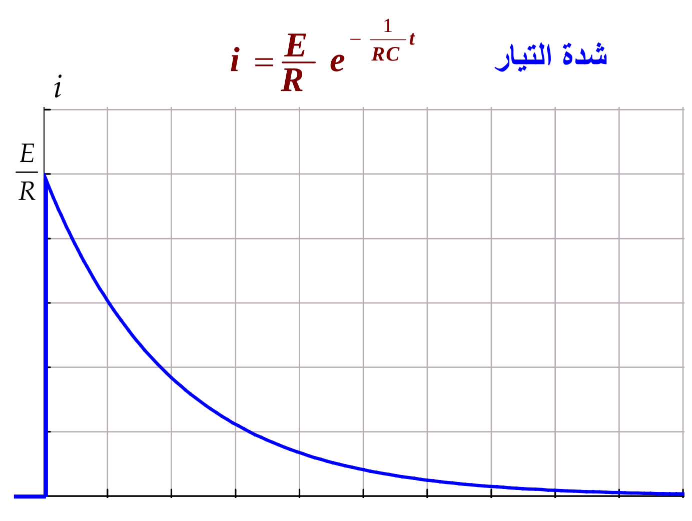
$$C = C_1 + C_2$$

شحن مكثفة

التوتر $u_c = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

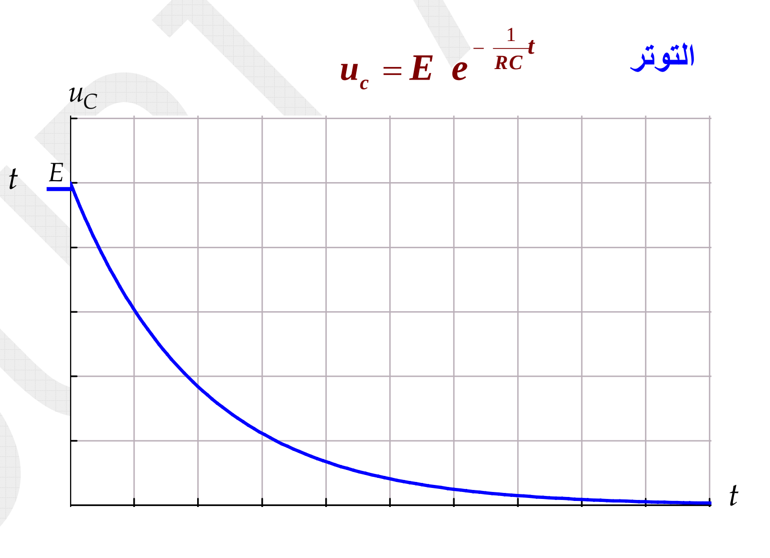


شدة التيار $i = \frac{E}{R}\, e^{-\frac{1}{RC}t}$

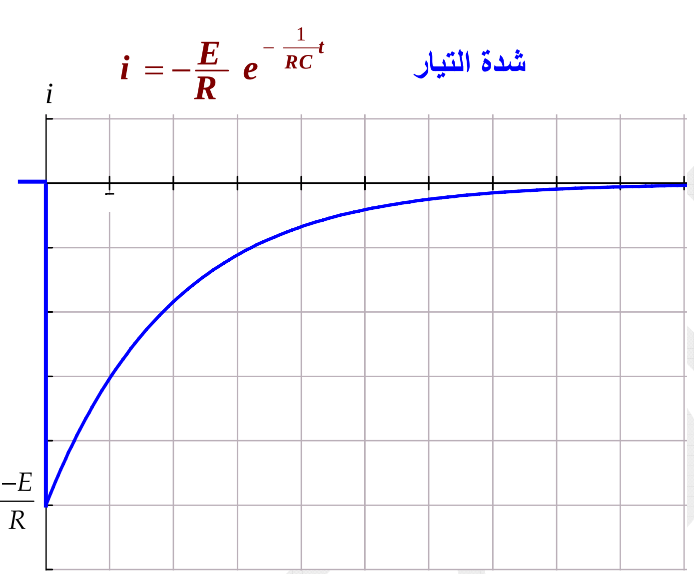


تفريغ مكثفة

التوتر $u_c = E\, e^{-\frac{1}{RC}t}$

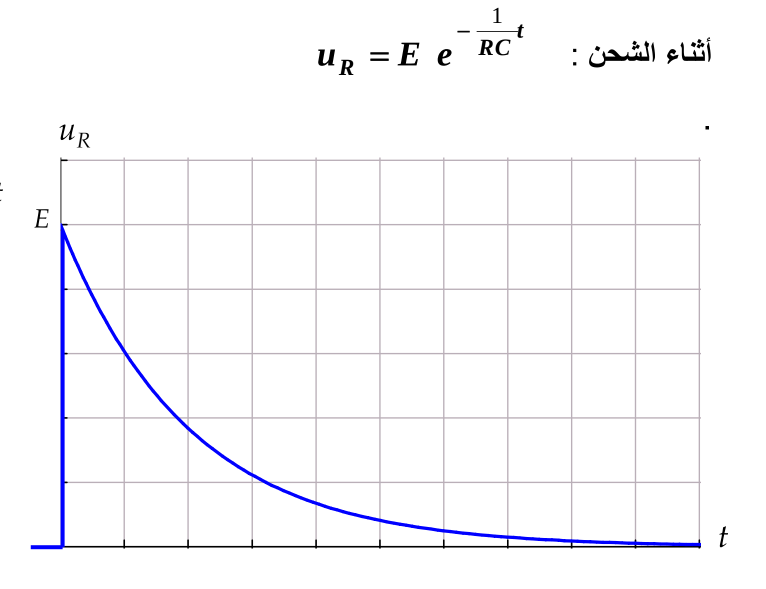


شدة التيار $i = -\frac{E}{R}\, e^{-\frac{1}{RC}t}$



التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي

أثناء الشحن : $u_R = E\, e^{-\frac{1}{RC}t}$



أثناء التفريغ : $u_R = -E\, e^{-\frac{1}{RC}t}$

المعادلات التفاضلية التي تخضع لها المقادير u_C ، q ، u_R

عند الشحن

التوتر بين طرفي المكثفة : $\frac{du_c}{dt}+\frac{1}{RC}u_c=\frac{E}{RC}$

الشحنة على لبوسي المكثفة : $\frac{dq}{dt}+\frac{1}{RC}q=\frac{E}{R}$

التوتر بين طرفي الناقل الأومي : $\frac{du_R}{dt}+\frac{1}{RC}u_R=0$

عند التفريغ

التوتر بين طرفي المكثفة : $\frac{du_c}{dt}+\frac{1}{RC}u_c=0$

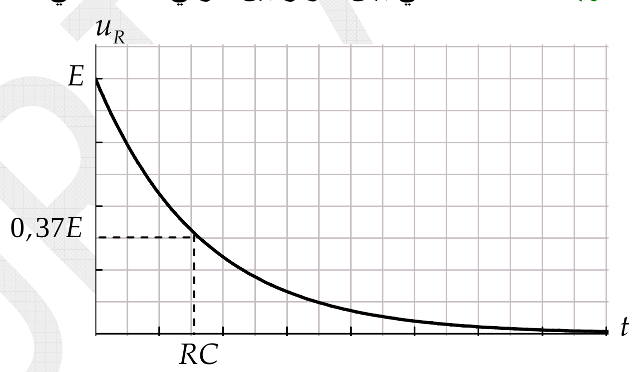
الشحنة على لبوسي المكثفة : $\frac{dq}{dt}+\frac{1}{RC}q=0$

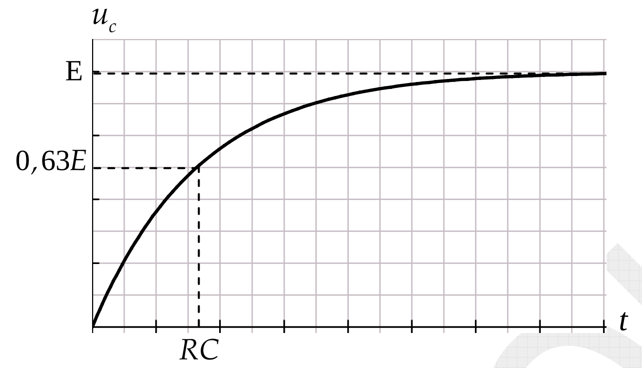
التوتر بين طرفي الناقل الأومي : $\frac{du_R}{dt}+\frac{1}{RC}u_R=0$

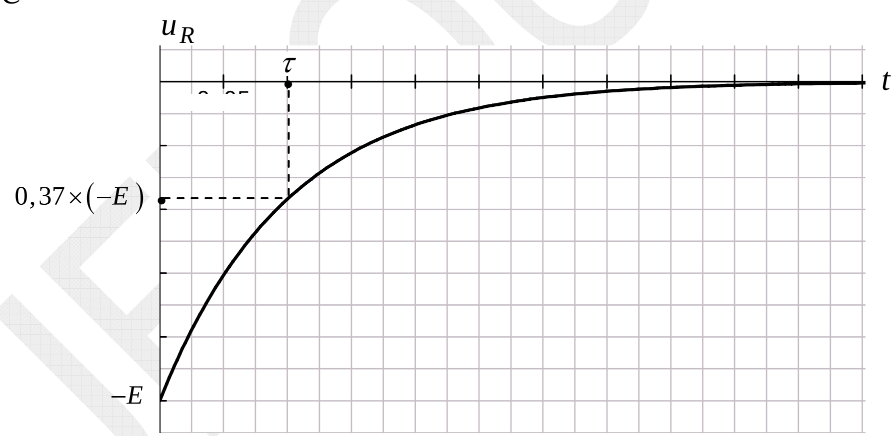
ثابت الزمن

ثابت الزمن هو الجداء RC ، أي $\tau = RC$ وهو مقدار متجانس مع الزمن . نعيّنه من كل هذه البيانات بالطرق التالية :

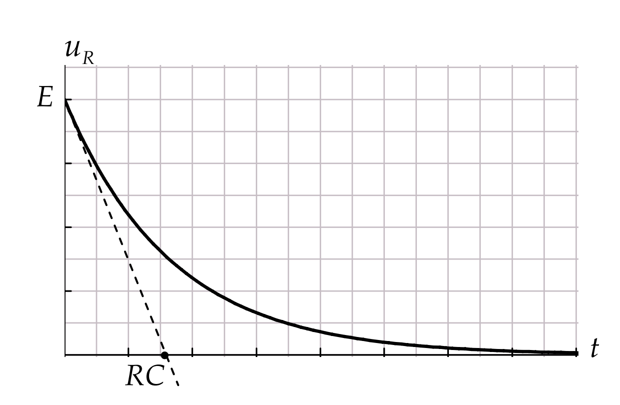
الطريقة 1 : مثلا في بيان التوتر بين طرفي المكثفة في حالة الشحن والتوتر بين طرفي الناقل الأومي في حالة الشحن والتفريغ .

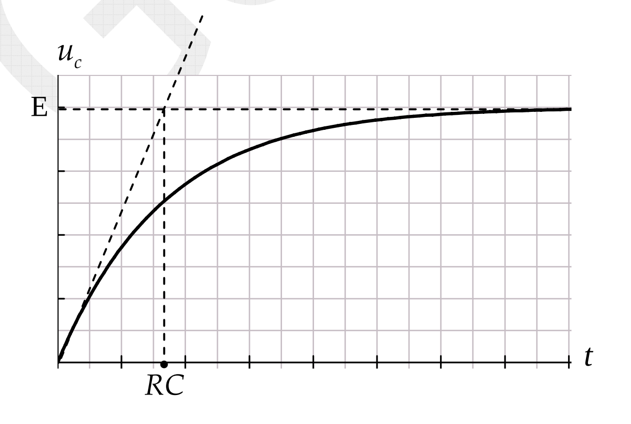




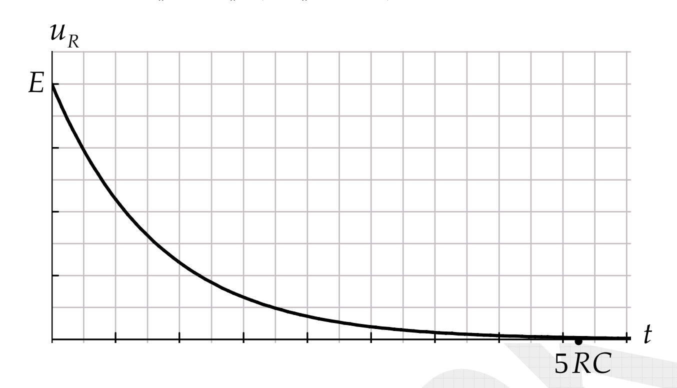


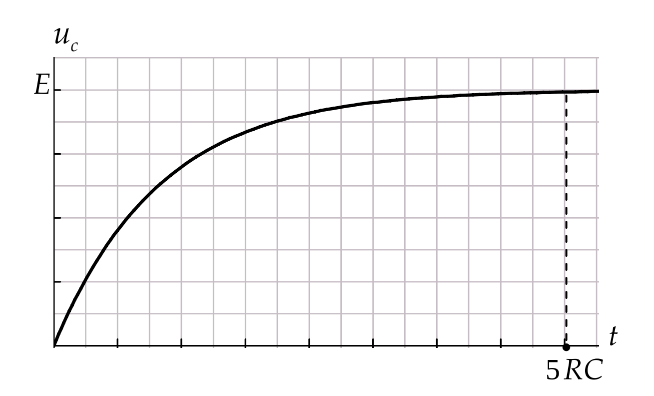
الطريقة 2 : مماس البيان عند $t=0$ يتقاطع مع المستقيم الأفقي $u_c = E$ و $u_R=0$ في النقطة التي فاصلتها $t = RC$





الطريقة 3 : نهاية النظام الانتقالي تتم في حوالي $t = 5\tau$





الطاقة المخزنة في مكثفة

عندما نشحن مكثفة تخزّن طاقة كهربائية $E_c = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$ ، E (joule)

الدرس

1 - المكثفة

نسمّي مكثفة المجموعة المتكونة من صفيحتين ناقلتين متوازيتين نسميهما **اللبوسان** ، يفصل بينهما عازل سمكه صغير جدا . يمكن أن يكون هذا العازل هو الهواء .(الشكل – 1)

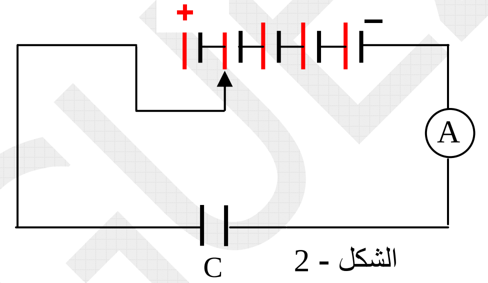
B A

الشكل - 1

2 - سعة مكثفة

عندما نطبق على لبوسي المكثفة توترات مختلفة U_1 ثم U_2 ثم U_3 ...(الشكل – 2) ، تكتسب الشحنات Q_1 ، Q_2 ، Q_3... والتي تتناسب مع مقدار انحراف إبرة الأمبير متر ، لأن التيار الكهربائي الذي يمر في الأمبير متر يتناسب مع كمية الكهرباء المارة في الدارة في وحدة الزمن . (لا تسألني الآن عن مرور التيار في المكثفة رغم العازل بين لبوسيها ، لا تتعجّل .. في العجلة الندامة) .

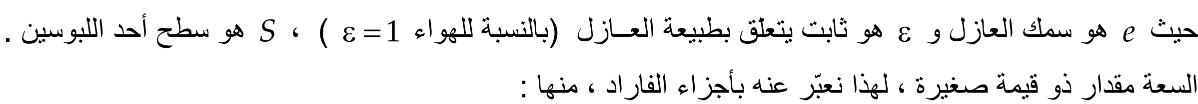
نجد أن : $\frac{Q_1}{U_1} = \frac{Q_2}{U_2} = \frac{Q_3}{U_3} = ...$ ، تسمى هذه النسبة سعة المكثفة C ، وتقاس بالفاراد Farad (F)



الشكل - 2

سعة مكثفة مقدار يميّز المكثفة ، لا يتعلق إلا بسطحي اللبوسين والبعد بينهما وطبيعة العازل بينهما .

مثلا سعة مكثفة مسطحة هي $C = 8,85 \times 10^{-12} \times \frac{\varepsilon S}{e}$



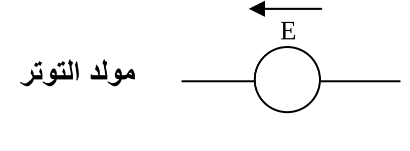
حيث e هو سمك العازل و ε هو ثابت يتعلّق بطبيعة العـازل (بالنسبة للهواء $\varepsilon = 1$) ، S هو سطح أحد اللبوسين .

السعة مقدار ذو قيمة صغيرة ، لهذا نعبّر عنه بأجزاء الفاراد ، منها :

الميكروفاراد (μF) : $1\ \mu F = 10^{-6}\ F$ النانو فاراد (ηF) : $1\ \eta F = 10^{-9}\ F$

3 - شحن المكثفة

ملاحظة 1 : يجب التفريق بين مولد التوتر ومولد التيار .



الفرق : مولد التوتر : تبقى E ثابتة مهما كانت الدارة .

مولد للتيار : تبقى I ثابتة مهما كانت الدارة (مثال : الدينامو)

ملاحظة 2 : مولدات التوتر التي نستعملها تكون مثالية (أي مقاومتها الداخلية مهملة) ، ويكون بذلك فرق الكمون بين طرف المولد : U = E أثناء إصداره للتيار وليس $U = E - rI$ ، لأن $r \approx 0$.

للتذكير : نتكلم عن الكمون بالنسبة لنقطة من دارة كهربائية ، أما بين نقطتين يوجد فرق في الكمون ، وهو التوتر .

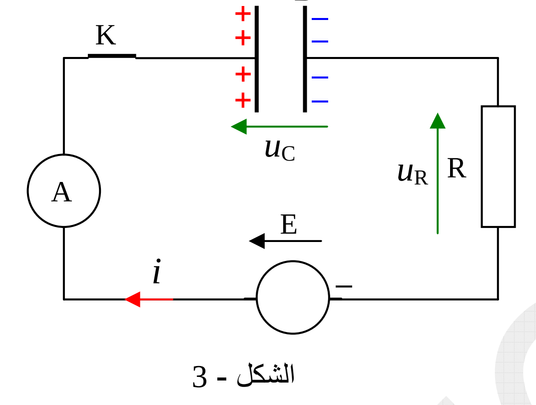
- قبل غلق القاطعة K يكون اللبوسان في نفس الكمون $(V_A = V_B = 0)$. (الشكل – 3)

حيث يكون لدينا نفس عدد الإلكترونات على اللبوسين (الإلكترونات التي تدور حول أنوية معدن اللبوسين)

- عندما نغلق القاطعة يقوم القطب الموجب للمولد بسحب الإلكترونات من اللبوس A ويقوم بدفعها نحو اللبوس B ، وهذه العملية ليست منتظمة ، لأن عملية الشحن تزداد صعوبة كلما اقتربت من نهايتها ، وهذا ما يُبيّنه رجوع إبرة الأمبير متر نحو الصفر بعدما انحرفت فجأة نحو قيمة عظمى . ولما تنعدم شدّة التيار تكون عملية الشحن قد انتهت .

يُمكن فصل المكثفة من الدارة وتبقى مشحونة .

- عندما يكتمل الشحن يكون : $Q_B = -Q_A$



الشكل - 3

تصبح المكثفة مشحونة ويكون مجموع شحنتي لبوسيها دائما معدوما

$$Q_A + Q_B = 0$$

تعقيبـــاب

- الالكترونات لا يمكنها عبور العازل .
- أثناء الشحن ، يشير مقياس الأمبير إلى تيار متغير ، حيث ينعدم هذا التيار في نهاية الشحن كما سبق أن ذكرنا ذلك . إذن يمكن تحديد نظامين (مرحلتين) :

النظام الإنتقالي : من لحظة غلق القاطعة إلى أن تنعدم شدة التيار .

النظـام الدائم : بما أن شدة التيار انعدمت ، إذن التوتر بين طرفي الناقل الأومي يصبح معدوما كذلك لأن $u_R = R\,i$ ، وبالتالي يصبح فرق الكمون بين طرفي المكثفة مساويا لفرق الكمون بين طرفي المولّد أي : $u_C \approx E$

4 - تفريغ المكثفة

نعزل المكثفة عن المولّد وهي مشحونة ونربطها في دارة مع ناقل أومي (الشكل – 4) .

في هذه الحالة تكون المكثفة بمثابة مولد (لكن مؤقت) . تعود الإلكترونات إلى أماكنها لتحقيق التوازن الكهربائي ، فيمر تيار في الدارة في عكس الجهة التي مر فيها أثناء شحن المكثفة.

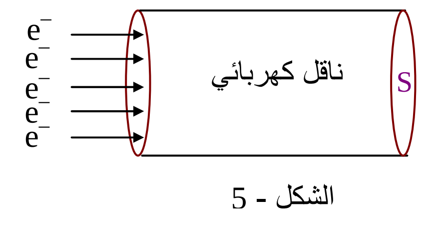
ينعدم هذا التيار لحظة **إفراغ** المكثفة ، فيصبح التوتر بين طرفي المكثفة $u_C = 0$

الشكل - 4

5 - نمذجة المكثفة

أ - تعريف : شدة التيار الكهربائي هي كمية الكهرباء التي تمر عبر المقطع (S) لناقل كهربائي خلال وحدة الزمن .

معنى هذا أن شدة التيار تتعلق بعدد الإلكترونات التي تمر عبر المقطع خلال ثانية واحدة .



الشكل - 5

ونعلم أن هذا العدد من الإلكترونات يحمل كمية من الكهرباء $|q| = ne$

حيث : n هو عدد الإلكترونات و e هي شحنة الإلكترون . (الشكل – 5)

نكتب إذن شدة التيار كما يلي : $$i = \frac{dq}{dt} \qquad (1)$$

أي أن شدة التيار هي الكمية الصغيرة من الكهرباء dq التي تمر خلال المدة الزمنية الصغيرة dt ، وهذا مدلوله رياضيا مشتق كمية الكهرباء بالنسبة للزمن .

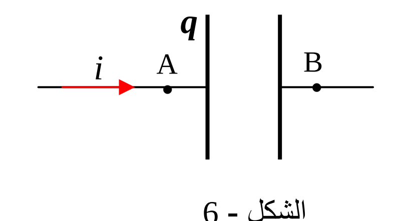
إذا كان التيار ثابتا فإن صبيب الكهرباء يكون ثابتا عبر المقطع S وبالتالي $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ ، حيث ΔQ هي كمية الكهرباء المارة خلال المدة الزمنية Δt .

ملاحظة :

في كل ما يلي نرمز للمقادير اللحظية ، أي المقادير التي تتغير بتغيّر الزمن بالرموز الصغيرة (i ، u ، q) ، ونرمز لقيمها العظمى بالرموز الكبيرة (I ، U ، Q)

إصطلاح :

في ما يلي لما نقول شحنة مكثّفة q نقصد بها القيمة الموجبة للشحنة ، وهي شحنة اللبوس A أي اللبوس الذي يصل له التيار الكهربائي i . (الشكل – 6)



الشكل - 6

ب - فرق الكمون بين طرفي مكثفة

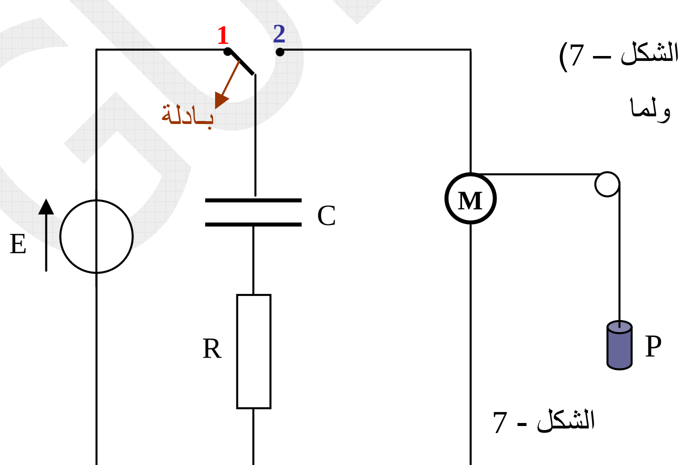
يتناسب فرق الكمون بين طرفي مكثّفة مع شحنة المكثّفة وسعتها $$u_c = \frac{q}{C} \qquad (2)$$

من العلاقتين (1) و (2) نستنتج عبارة شدة التيار : $$i = C\frac{du_c}{dt}$$ (تذكر دائما أن C مقدار ثابت ، أي لا يتغير مع الزمن)

جـ – الطـاقة المخزّنة في المكثفة

يمكن للمحرّك M أن يسحب الجسم P بواسطة خيط عندما يدور . (الشكل – 7)

نصل البادلة (قاطعة ذات وضعيتين) للوضعية **1** ، فتُشحن المكثفة ، ولما نصل البادلة للوضعية **2** نلاحظ صعود الجسم P ، دلالة على أن المكثفة خزّنت طاقة أثناء الشحن ثم قدمتها عند تفريغها للمحرك ، مما جعل هذا الأخير يرفع الجسم P .



الشكل - 7

المحرك حوّل الطاقة الكهربائية إلى طاقة ميكانيكية

الاستطاعة التي تقدمها المكثفة للدارة أثناء التفريغ هي :

$$p = u_c i = Cu_c\frac{du_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2\right)$$

نعلم أن الاستطاعة هي مشتق الطاقة بالنسبة للزمن ، أي $p = \dfrac{dE_e}{dt}$ ، ومنه الطاقة المخزنة في المكثفة هي :

$$E_c = \frac{1}{2} C u_c^2$$ ، حيث E_c بالجول (Joule)

وبما أن $q = C\,u_c$ يمكن كتابة الطاقة بالشكل : $E_c = \dfrac{1}{2} q u_c$

ملاحظة :

لكي نفرّق بين القوة المحركة الكهربائية للمولد والطاقة الكهربائية رمزنا للأولى بـ E وللثانية بـ E_c .

دراسة ثنائي القطب RC

1 – تجربة

نركب التجهيز المبيّن في الشكل – 8 ، حيث نستعمل 3 مصابيح متماثلة ومولدا للتوتر يعطي تيارا مستمرا .

عندما نغلق القاطعة K ، نلاحظ ما يلي :

- المصباح L_1 لا يشتعل
- المصباح L_2 يشتعل
- المصباح L_3 يشتعل ثم ينطفئ .

الشكل - 8

التفسير :

التيار لا يمر في L_1 لأن القاطعة K_1 مفتوحة .

التيار يمر في L_2 لأن القاطعة K_2 مغلقة

التيار يمر في L_3 في اللحظة التي نغلق فيها القاطعة الرئيسية K ، لأن شدة التيار في الفرع السفلي تنتقل من الصفر إلى أعظم قيمة ثم تعود تدريجيا للصفر حينها ينطفئ المصباح L_3 .

إذن المكثفة ليست مجرد قاطعة

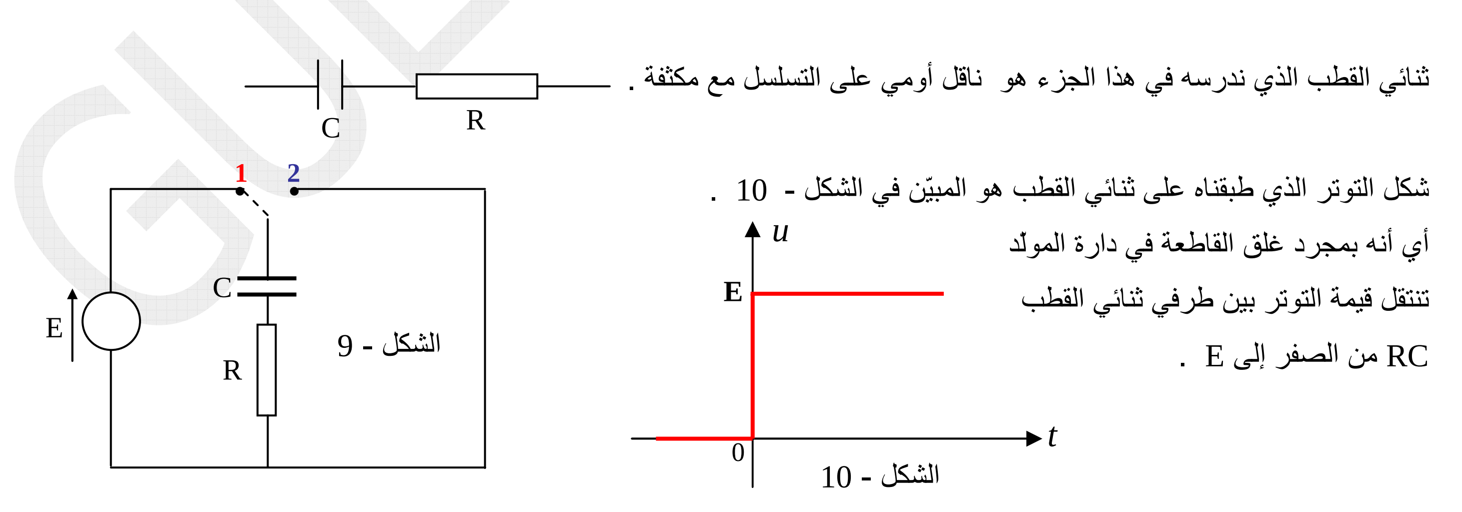
لدراسة تطور التوتر بين طرفي المكثفة وشدة التيار في الدارة ، نركب دارة بمولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية E ومكثفة سعتها C وناقل أومي مقاومته R . (الشكل – 9)

ملاحظة : يمكن لثنائي قطب أن يشمل عنصرا واحدا ، مثلا ناقل أومي ، أو يشمل عدة عناصر ، مثلا ناقل أومي ومكثفة .

ثنائي القطب الذي ندرسه في هذا الجزء هو ناقل أومي على التسلسل مع مكثفة .

شكل التوتر الذي طبقناه على ثنائي القطب هو المبيّن في الشكل - 10 .

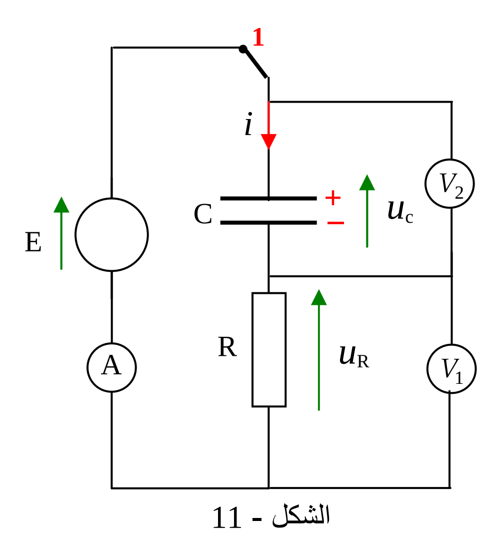
أي أنه بمجرد غلق القاطعة في دارة المولد تنتقل قيمة التوتر بين طرفي ثنائي القطب RC من الصفر إلى E .



الشكل - 9

الشكل - 10

2 - الشحن



الشكل - 11

نصل البادلة للوضعية 1 في اللحظة $t=0$ في الدارة المرسومة في الشكل - 11 .

مقياس الأمبير A : تنحرف إبرته إلى قيمة عظمى .

مقياس الفولط V_1 : يشير إلى القيمة E .

مقياس الفولط V_2 : تبقى الإبرة على الصفر .

في المرحلة التي تكون فيها إبرة الأمبير متر راجعة نحو الصفر ترجع كذلك إبرة V_1 نحو الصفر ، حيث أن التوتر بين طرفي الناقل الأومي يتناقص إلى أن ينعدم ، لأن $u_R = R\,i$ ، أي ينعدم بانعدام i .

في اللحظة التي تنعدم فيها شدة التيار تصبح إبرة V_2 تشير إلى $u_c = E$ ،

لأن في كل لحظة $E = u_c + u_R$. تحدث كل هذه العمليات في وقت قصير جدا ، وذلك حسب قيمتي R و C .

2 - 1 - تطور التوتر بين طرفي المكثفة

حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا التوتر بين طرفي ثنــائي القطب RC : $E = u_C + u_R = u_C + R\,i$

ولدينا $i = C\dfrac{du_c}{dt}$ ، وبالتالي : $E = u_c + RC\dfrac{du_c}{dt}$ ، وبتقسيم طرفي هذه المعادلة على RC :

التوتّر بين طرفي المكثفة يحقق المعادلة التفاضلية :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = \frac{E}{RC} \qquad (3)$$

إن حل هذه المعادلة التفاضلية يكون من الشكل $u_c = Ae^{\alpha t} + B$ (4)

حيث : A ، B ، α عبارة عن ثوابت . (اتصل بأستاذ الرياضيات ليزوّدك بالمزيد)

لكي نحدّد B و α نعوّض في المعادلة (3) : $u_c = Ae^{\alpha t} + B$ و $\dfrac{du_c}{dt} = A\alpha e^{\alpha t}$ ، ونكتب بذلك :

$$A\alpha e^{\alpha t} + \frac{1}{RC}\left(Ae^{\alpha t} + B\right) = \frac{E}{RC}$$

$$Ae^{\alpha t}\left(\alpha + \frac{1}{RC}\right) + \frac{B}{RC} = \frac{E}{RC} \qquad (5)$$

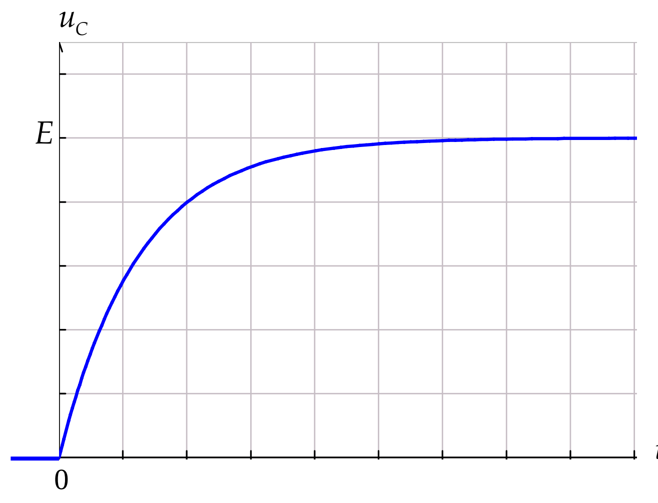
حتى تكون المعادلة (5) محققة يجب أن يكون $\alpha = -\dfrac{1}{RC}$ و $B = E$

نستنتج A من المعادلة (4) ، حيث يكون عند اللحظة $t=0$ فرق الكمون بين طرفي المكثفة $u_C = 0$.

بالتعويض : $0 = Ae^0 + B$ ، مع العلم أن $e^0 = 1$ ، إذن $A = -B = -E$.

التوتر بين لبوسي المكثفة أثناء الشحن هو

$$\boldsymbol{u_c = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)}$$



التمثيل البياني $u_c = f(t)$

- عندما $t = 0$ فإن $u_c = 0$
- عندما t يؤول إلى ما لا نهاية ، فإن

$$u_c = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}\times\infty}\right) = E\,(1-0) = E$$

أي أن في نهاية الشحن يؤول u_C نحو قيمة القوة المحركة الكهربائية للمولد .

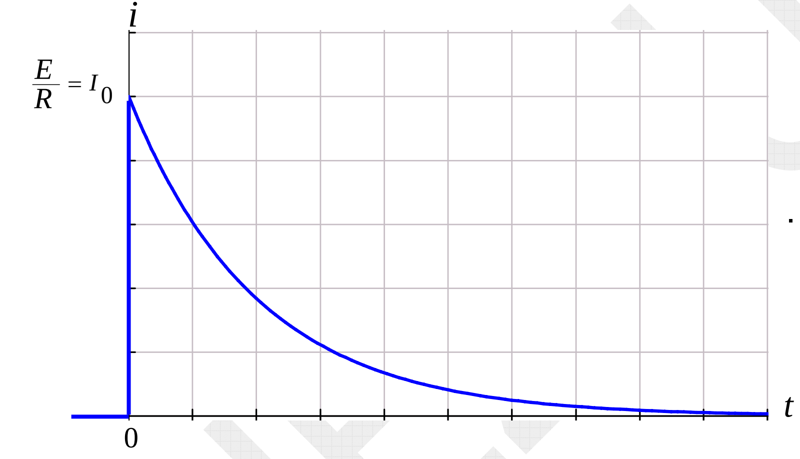
2 - 3 - تطور شدة التيار في الدارة

لدينا في العلاقة (1) أعلاه :
$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_c}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)\right) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

شدة التيار في الدارة أثناء الشحن هي

$$\boldsymbol{i = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

حيث $I_0 = \dfrac{E}{R}$ هي أعظم شدة يشير لها مقياس الأمبير .




التمثيل البياني $i = f(t)$

- عندما $t = 0$ فإن $i = \dfrac{E}{R} = I_0$
- عندما t يؤول إلى ما لا نهاية ، فإن i يؤول نحو الصفر .

3 – التفريغ

3 – 1 – تطوّر التوتر بين طرفي المكثفة

في التركيب في الشكل – 9 (المرسوم في الصفحة 7) نصل البادلة إلى الوضع 2 ، فتكون لدينا الدارة الكهربائية التالية (شكل – 12) .

السهم الأحمر هو الجهة الاصطلاحية للتيار ، أي جهة التيار التي كان يصدره المولد أثناء الشحن وليس جهة التيار التي تصدره المكثفة .

التوتران u_c و u_R مختلفان في الإشارة .

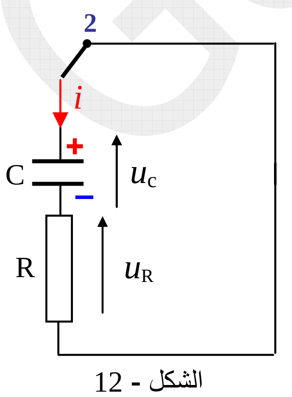
ملاحظة : يمكن أن نمثّل دارة التفريغ كما في الشكل – 13

حيث السهم الأخضر يمثل جهة التيار الذي تصدره المكثفة ،

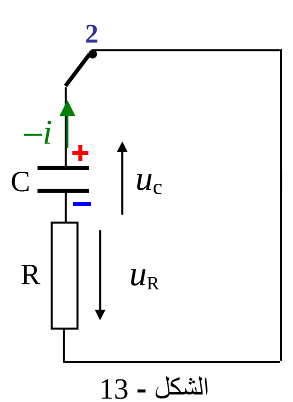
لأن المكثفة أصبحت بمثابة مولد أثناء التفريغ .

عندما نصل البادلة إلى الوضعية 2 يصبح التوتر بين طرفي ثنائي القطب RC مساويا للصفر (لا يوجد المولّد).

وبالتالي : $u_R + u_c = 0$



الشكل - 12



الشكل - 13

أو $\frac{du_c}{dt}+\frac{1}{RC}u_c=0$ ، وبتقسيم طرفي المعادلة على RC نكتب : $u_c+RC\frac{du_c}{dt}=0$ (6)

هذه معادلة تفاضلية حلها من الشكل : $u_c=Ae^{\alpha t}+B$ (7)

من (6) و (7) نكتب : $A\alpha e^{\alpha t}+\frac{1}{RC}\left(Ae^{\alpha t}+B\right)=0$

$Ae^{\alpha t}\left(\alpha+\frac{1}{RC}\right)+\frac{B}{RC}=0$ ، وحتى تكون هذه المعادلة محققة يجب أن يكون : $\alpha=-\frac{1}{RC}$ و $B=0$

من الشروط الابتدائية ، عند $t = 0$ يكون $u_c = E$ ، وبالتعويض في (7) نجد $A = E$

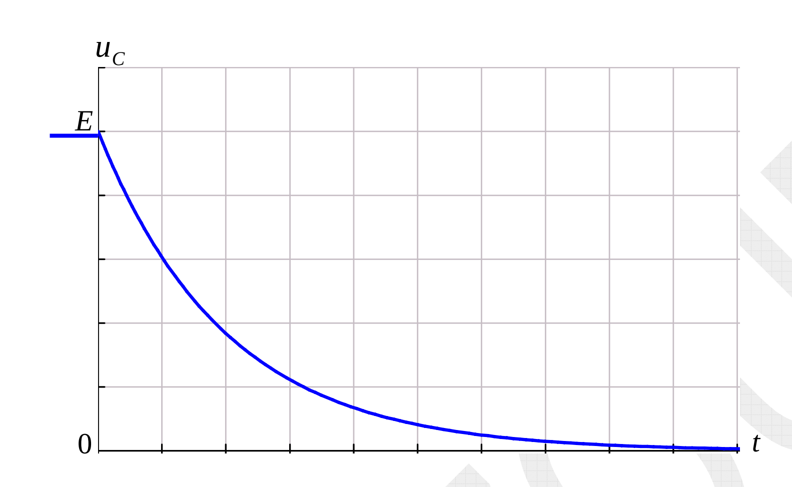
التوتر بين لبوسي المكثفة أثناء التفريغ هو

$$u_c=E\ e^{-\frac{1}{RC}t}$$

التمثيل البياني $u_c=f\left(t\right)$

- عندما $t = 0$ فإن $u_c=E\ e^{-\frac{1}{RC}\times 0}=E\ e^0=E$
- عندما t يؤول إلى ما لا نهاية ، فإن

$$u_c=E\ e^{-\frac{1}{RC}\times\infty}=E\ \times 0=0$$



3 – 2 – تطوّر شدة التيار في الدارة

$$i=C\frac{du_c}{dt}=-\frac{CE}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

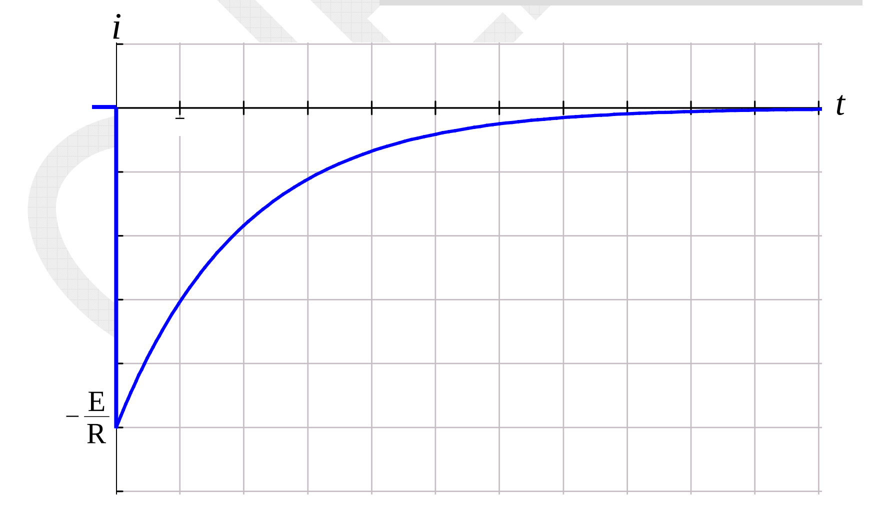
شدة التيار في الدارة أثناء التفريغ هي

$$i=-\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

التمثيل البياني $i=f\left(t\right)$

- عندما $t = 0$ فإن $i=-\frac{E}{R}\times e^0=-\frac{E}{R}$
- عندما t يؤول إلى ما لا نهاية ، فإن

$$i=-\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}\times\infty}=0$$



4 – تطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي

4 -1 - أثناء الشحن :

لدينا $u_R = Ri$ ، ولدينا $i = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$ ، ومنه $u_R = E\ e^{-\frac{1}{RC}t}$

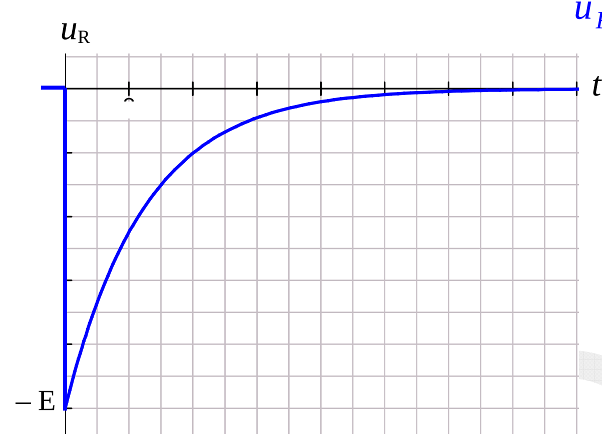
التمثيل البياني :

- عندما $t = 0$ فإن $u_R = E\ e^{-\frac{1}{RC}\times 0} = E$

- عندما $t \to \infty$ فإن $u_R = E\ e^{-\frac{1}{RC}\times \infty} = 0$

4 -2 - أثناء التفريغ :

لدينا $u_R = Ri$ ، ولدينا $i = -\frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$ ، ومنه $u_R = -E\ e^{-\frac{1}{RC}t}$



- عندما $t = 0$ فإن $u_R = -E\ e^{-\frac{1}{RC}\times 0} = -E$

- عندما $t \to \infty$ فإن $u_R = -E\ e^{-\frac{1}{RC}\times \infty} = 0$

5 – ثابت الزمن

هو الثابت $\tau = RC$ ، حيث R هي المقاومة المكافئة للدارة . تُعطينا قيمة ثابت الزمن فكرة عن المدّة التي تُشحن فيها المكثفة أو تُفرّغ

التحليل البعدي لثابت الزمن :

$RC = R\frac{Q}{U} = R\frac{It}{U}$ وبالتالي : $[RC] = \frac{[U]}{[I]}\frac{[I][T]}{[U]} = [T]$

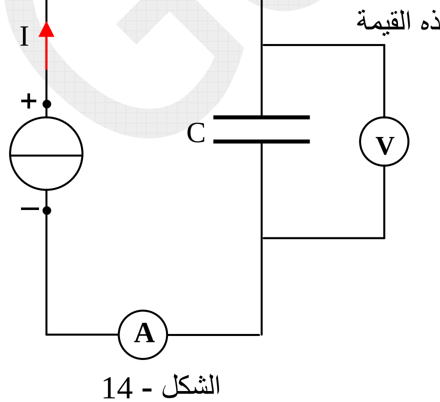
الثابت $\tau = RC$ مقدار متجانس مع الزمن

6 - دراسة التوتر بين طرفي المكثفة باستعمال مولد للتيار

ندرس مثالا تجريبيا بحيث نستعمل مولدا للتيار وليس مولدا للتوتر (الشكل 14)

نضبط شدة تيار المولد على القيمة I = 0,30 mA ، ثم نغلق القاطعة فيشير مقياس الأمبير إلى هذه القيمة وتبقى ثابتة طيلة عملية الشحن . نسجّل قيم التوتر بين طرفي المكثفة في مختلف اللحظات :

t (s)	0	10	20	30	40	50	60	70
u_C (V)	0	0,62	1,24	1,85	2,49	3,09	3,71	4,33
t (s)	80	90	100	110	120	130	140	
u_C (V)	4,93	5,57	6,18	6,78	7,33	7,93	8,92	



الشكل - 14

نمثل البيان $u_C = f(t)$

نلاحظ من التمثيل البياني أن العلاقة بين التوتر بين طرفي المكثفة والزمن من الشكل $u_C = a\,t$

العلاقة النظرية :

في اللحظة $t = 0$ كانت المكثفة فارغة ، وفي اللحظة t تكتسب المكثّفة شحنة كهربائية $Q = It$ (8)

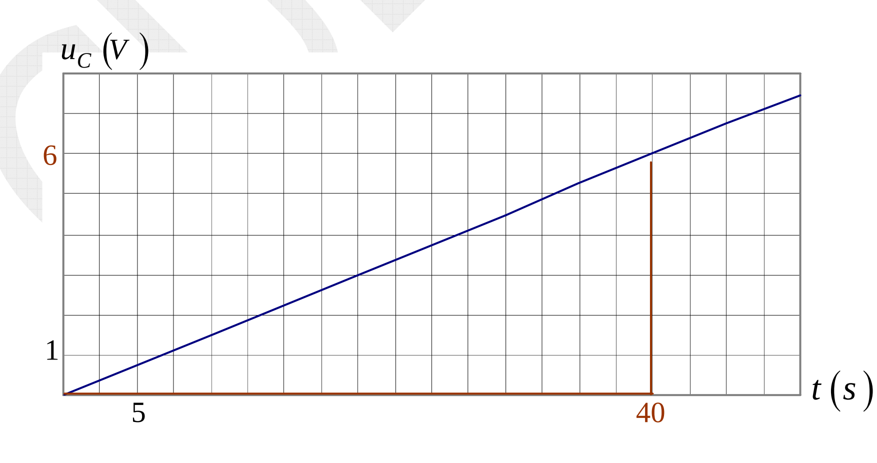
ولدينا $u_c = \dfrac{Q}{C}$ (9)

من العلاقتين (8) و (9) نستنتج : $u_c = \dfrac{I}{C}\,t$ ، ميل البيان هو $\dfrac{I}{C}$. يمكن استنتاج سعة المكثفة من البيان ، وذلك

بحساب الميل : $\dfrac{I}{C} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{50} = 0{,}06\ V.S^{-1}$ ، ومنه : $C = \dfrac{I}{0{,}06} = \dfrac{0{,}3\times10^{-3}}{0{,}06} = 5\times10^{-3}F$

نفرّغ المكثفة ونعيد شحنها ، لكن هذه المرة نضبط شدّة تيار المولد على القيمة I’ = 0,70 mA . نتحصل على النتائج التالية :

t (s)	0	10	20	30	40	50
$\boldsymbol{u_C}$ (V)	0	1,50	2,90	4,47	6,02	7,45



نمثّل البيان $u_C = f(t)$

ميل البيان $\dfrac{I}{C} = \dfrac{6}{40} = 0{,}15$

$$C = \frac{I}{0{,}15} = \frac{0{,}7\times10^{-3}}{0{,}15} = 4{,}67\times10^{-3}F$$

كل ما في الأمر أنه كلما كانت شدة التيار أكبر كلما شُحنت المكثفة في وقت أقصر .



7 - دراسة الطاقة المخزّنة في مكثفة بدلالة الزمن

أ) أثنــاء الشحن

عبارة الطاقة المخزّنة في المكثفة هي

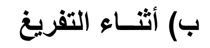
$$E_C = \frac{1}{2} C u_C^2$$

العبارة الزمنية للتوتر بين طرفي المكثفة هي

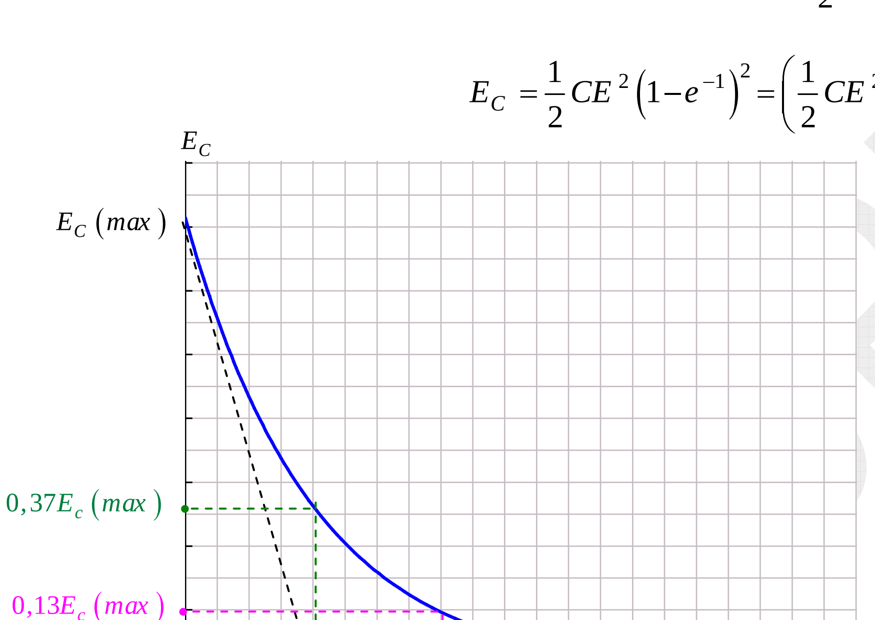
$u_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ ، وبالتعويض في عبارة

الطاقة نجد $E_C = \frac{1}{2} CE^2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2$ ، حيث $E_C(max) = \frac{1}{2} CE^2$

عندما نضع $t = \tau$ نجد $E_C = \frac{1}{2} CE^2 \left(1 - e^{-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} CE^2\right) \times 0,4 = 0,4 E_C(max)$



ب) أثنــاء التفريغ



عبارة الطاقة المخزّنة في المكثفة هي

$$E_C = \frac{1}{2} C u_C^2$$

العبارة الزمنية للتوتر بين طرفي المكثفة هي

$u_C = E\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ ، وبالتعويض في عبارة

الطاقة نجد $E_C = \frac{1}{2} CE^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$

عندما نضع $t = \tau$ نجد

$$E_C = \frac{1}{2} CE^2 \left(e^{-2}\right) = \left(\frac{1}{2} CE^2\right) \times 0,13 = 0,13 E_C(max)$$

أما عندما نضع $t = \frac{\tau}{2}$ نجد $E_C = 0,37 E_C(max)$

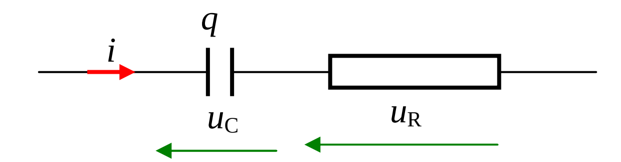
كيف نثبت أن المماس عند $t = 0$ يقطع محور الزمن في $t' = \frac{\tau}{2}$ ؟

لدينا ميل المماس هو $a = -\frac{E_C(max)}{t'} = -\frac{\frac{1}{2} CE^2}{t'}$

وكذلك هذا الميل هو العدد المشتق للدالة $E_C = f(t)$ عند $t = 0$ ، حيث المشتق هو $f'(t) = \frac{1}{2} CE^2 \times \left(-\frac{2}{\tau}\right) e^{-\frac{2t}{\tau}}$

$f'(0) = \frac{1}{2} CE^2 \times \left(-\frac{2}{\tau}\right) e^{-\frac{2\times 0}{\tau}} = -\frac{CE^2}{\tau} = a$ ، وبالتالي $t' = \frac{\tau}{2}$

كيفية كتابة المعادلات التفاضلية عند شحن وتفريغ المكثفة



1 – أثناء الشحن

المعادلة التي يخضع لها التوتر بين طرفي المكثفة :

حسب قانون جمع التوترات : $u_C + u_R = E$

$u_C + R\,i = E$ ، ولدينا $i = \frac{dq}{dt}$ ، وبالتالي : $u_C + R\frac{dq}{dt} = E$ ، ولدينا كذلك $q = C\,u_C$

$u_C + R\frac{dCu_C}{dt} = E$ ، وبما أن C عبارة عن ثابت نكتب العبارة كالتالي $u_C + RC\frac{du_C}{dt} = E$

بتقسيم طرفي هذه المعادلة على RC نكتب المعادلة التفاضلية المطلوبة : $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$

المعادلة التي تخضع لها الشحنة على لبوسي المكثفة :

$u_C + u_R = E$

$u_C + R\,i = E$ ، ولدينا $i = \frac{dq}{dt}$ و $u_C = \frac{q}{C}$ ، وبالتالي : $R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$.

بتقسيم طرفي هذه المعادلة على R نكتب المعادلة التفاضلية المطلوبة : $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}$

المعادلة التي يخضع لها التوتر بين طرفي الناقل الأومي :

$u_C + u_R = E$

لدينا $u_C = \frac{q}{C}$ وبالتالي : $u_R + \frac{q}{C} = E$ ، لو اشتققنا طرفي هذه المعادلة بالنسبة للزمن نجد : $\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$ ،

ولدينا $i = \frac{dq}{dt} = \frac{u_R}{R}$ ، وبالتالي : $\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C}\frac{u_R}{R} = 0$ ، وتكون المعادلة التفاضلية المطلوبة هي :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = 0$$

2 - أثناء التفريغ

حسب قانون جمع التوترات : $u_C + u_R = 0$

بنفس الطرق السابقة (الشحن) نجد المعادلات التفاضلية التالية :

التوتر بين طرفي المكثفة $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0$

الشحنة الكهربائية على لبوسي المكثفة $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0$

التوتر الكهربائي بين طرفي الناقل الأومي $\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = 0$